量子ホワイトノイズの数学的基礎(第3回『非平衡系の統計物理』シンポジウム(その1),研究会報告)

尾畑, 伸明

量子ホワイトノイズの数学的基礎

名古屋大学大学院
多元数理科学研究科
尾 畑 伸 明

はじめに

量子系の "雑音" は, 量子光学や散逸量子系の研究など理論物理から応用工学にわたる分野で盛んに研究されてきた (例えば [2], [5], [21] やそこに引用されている文献). 一方で, この 10 年来, Accardi 達の一連の報告集 [1], Hudson–Parthasarathy による量子確率微分方程式の基礎づけ [11], Meyer [12] や Parthasarathy [20] による量子確率過程の教科書, Ohya–Petz の量子エントロピー理論 [19] などを通して数学者の関心も高まってきている. なかでも Fock 空間上の量子確率過程は, 減衰過程のノイズ項のモデルなどに現れ, 数学的にも興味深い研究対象となっている. 量子確率論の起源は, 量子力学における波動関数の確率解釈や位置と運動量の不確定性などにある. したがって, 数学的定式化として Hilbert 空間上の作用素環論が広く用いられ, 実際, それは強力な手段を提供している. ただし, 物理的に興味のある作用素はしばしば非有界作用素となるので, 情況に応じて理論を工夫する必要がある. その意味で, 確率解析といわれている "無限変数" の超関数論のアイデアを導入することは一つの研究方向ではなかろうか.

この論文では, ホワイトノイズ解析 (飛田解析) と呼ばれている確率解析の方法を量子確率過程の研究に導入し, 理論を再構成するという最近の試みの一端を紹介する. ホワイトノイズ解析は, その著しい特徴

(a) 通常は確率超過程として扱われているホワイトノイズを, 各時点毎にガウス空間上の超関数が対応するような超関数空間内の連続な (実際は C^∞-級) 流れとして定式化していること;

(b) 通常は作用素値超関数として扱われている生成・消滅作用素を, 各点毎に意味のある連続作用素として定式化していること;

を生かして, 古典的確率過程の問題に応用されてきた [10]. 一方で, ホワイトノイズ解析の超関数論的側面からの研究は Fock 空間上の作用素理論へと進展している (理論の詳細は [13], [14]; 概略は [15] など). したがって, これまで古典論に終始してきたホワイトノイズ解析を, 作用素レベルに引き上げることによって, 各点毎の生成・消滅作用素を基本的な量子確率過程とする理論が構築できるはずである. また, この観点は物理学に現れる量子確率微分方程式 ([2], [5] など) の基礎づけにも有効であると思われる.

むろん, 量子確率過程を議論するにあたって, ホワイトノイズ解析は唯一の選択肢ではないし, この論文で提起するアプローチ自体も発展途上にある. ただ, これまでのところ, 量子確率論の研究に超関数論的なアイデアはそれほど積極的には現れていないので, 本論は

確率解析の非可換版を構成する上でたたき台ともなるだろう. まだ関連する論文も少ないが, [15], [16], [17], [18] も参照されたい.

1 ホワイトノイズ解析と Fock 空間上の作用素論

この報告では, Gelfand の三つ組

$$E = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H = L^2(\mathbb{R}, dt) \subset E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \tag{1.1}$$

に基礎にして話を進める. ここで $\mathbb{R}$ は, 後で議論する量子確率 "過程" の時間軸に相当する. ただし, この章で述べる主要な結果のためには E として急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ をとる必然性もなければ, $\mathbb{R}$ 上の関数空間にこだわる必要もない. 実際, $\mathbb{R}$ をかなり一般の位相空間 (topological space) にとりかえて理論を構成することができ, その方が応用上も有利である [13]. このことについては, この論文の最後 (§3.3.5) で少し触れる.

なお, (1.1) に現れている 3 つの空間はいずれも実空間である. H の実内積と $E^* \times E$ 上の標準双線形形式は, 整合しているので同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す. また H とその複素化 $H_{\mathbb{C}}$ のノルムを同じ記号 $|\cdot|_0$ で表す (添字 0 は後の都合による). さて, $E^*_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ 上の標準複素双線形形式は, H の実内積を拡張したものであるから, 同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表そう. したがって,

$$|\xi|_0^2 = \langle \bar{\xi}, \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\xi(t)} \xi(t)\, dt, \qquad \xi \in H_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{C}),$$

に注意すべきである.

注意 混乱を避けるため, この論文を通して, 複素 Hilbert 空間のエルミート内積を表す固有の記号は用いないことにする.

1.1 Wiener–Itô–Segal 同型

1.1.1 Fock 空間 $H_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}, dt; \mathbb{C})$ の n 重対称テンソル積 (つまり n 変数複素数値 L^2-関数で対称なもの全体) を $H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ で表す. なお, $H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} 0} = \mathbb{C}$ と約束する. 各 n に対して $f_n \in H_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ となっている関数列 $\mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ で

$$\|\mathbf{f}\|^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n!\, |f_n|_0^2 < \infty \tag{1.2}$$

をみたすもの全体は, $\|\cdot\|$ をノルムとして Hilbert 空間になる. これを $H_{\mathbb{C}}$ 上の (Boson) Fock 空間といい $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ で表す. これは, 本来, 自由度 1 の Bose 粒子の生成・消滅を記述するための Hilbert 空間である.

物理学の文献では, Fock 空間のノルム (1.2) の定義で, 荷重 $n!$ をつけないのがむしろ普通の流儀であるが, 数学的構造に本質的な違いを生ずるものではない. しかし, 後で必要になる指数ベクトルや生成・消滅作用素の定義も違ってくるので注意されたし.

1.1.2 Gauss 空間 まず, E の核型性 (付録 §A.4 参照) によって, E 上の連続な正定値 (正の定符号) 関数と E^* 上の有限測度は 1 対 1 対応する (Bochner–Minlos の定理). ここで, E^* には, $\xi \in E$ 毎に定まる 1 次関数 $E^* \ni x \mapsto \langle x, \xi \rangle$ をすべて可測にするような最小の σ-加法族 (cylindrical σ-field) が与えられているものとする. これは, E^* の強双対位相に関する位相的 σ-加法族と一致する. 特に,

$$e^{-|\xi|_0^2/2} = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu(dx), \qquad \xi \in E,$$

をみたす E^* 上の確率測度 μ を (標準) Gauss 測度, 確率空間 (E^*, μ) を Gauss 空間と呼ぶ. Gauss 空間は Lebesgue 測度を備えた Euclid 空間の最も自然な無限次元への拡張と考えられている.

1.1.3 Wiener–Itô–Segal 同型 この論文では, 母関数

$$e^{2ts-s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(t)$$

によって定まる多項式 $H_n(t)$ を n 次 Hermite 多項式という. すると, $x \in E^*$ に対して, 対称な n 変数超関数 $:x^{\otimes n}: \in (E^{\otimes n})^*_{\mathrm{sym}}$ が,

$$\left\langle :x^{\otimes n}:, \xi^{\otimes n} \right\rangle = \frac{|\xi|_0^n}{2^{n/2}} H_n \left(\frac{\langle x, \xi \rangle}{\sqrt{2}\, |\xi|_0} \right), \qquad x \in E^*, \quad \xi \in E, \quad \xi \neq 0,$$

をみたすものとして定義される. 次に, L^2-近似の議論で $x \mapsto \langle :x^{\otimes n}:, f_n \rangle$ が任意の $f_n \in H_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ に対して定義され, n が異なれば互いに直交することが証明される.

逆に, 任意の $\phi \in (L^2)$ に対して, $(f_n)_{n=0}^{\infty} \in \Gamma(H_{\mathbb{C}})$ が一意的に存在して,

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, f_n \right\rangle, \qquad x \in E^*, \tag{1.3}$$

が (E^*, μ) 上の L^2-収束の意味で成り立つ. 右辺の級数は直交和であり,

$$\| \phi \|_0^2 \equiv \int_{E^*} |\phi(x)|^2 \mu(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \, | f_n |_0^2 = \| \mathbf{f} \|^2 \tag{1.4}$$

となる. 表式 (1.3) を $\phi \in (L^2)$ の Wiener–Itô 展開といい, これによって引き起こされる (L^2) と $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ のユニタリー同型を Wiener–Itô–Segal の同型という. これは有名な結果であるが, ここで述べたような定式化に沿った証明は [10], [13] 等にある. こうして Fock 空間は, Gauss 空間を通して確率論と結びつく.

1.1.4 指数ベクトルと真空ベクトル 各 $\xi \in H_{\mathbb{C}}$ に対して,

$$\phi_\xi(x) = e^{\langle x, \xi \rangle - \langle \xi, \xi \rangle/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!} \right\rangle, \qquad x \in E^*, \tag{1.5}$$

とおけば, §1.1.3 の議論から $\phi_\xi \in (L^2)$ である. これらは指数ベクトル (あるいは coherent state) と呼ばれ, Fock 空間の議論でしばしば重要である. 特に, $\phi_0(x) \equiv 1$ は真空ベクトルと呼ばれる. 指数ベクトルの全体 $\{\phi_\xi \,;\, \xi \in H_{\mathbb{C}}\}$ は (L^2) の稠密部分空間を張る一次独立な関数系である.

1.2 ホワイトノイズ超関数

1.2.1 構成 緩増加超関数の空間 $E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ が微分作用素

$$A = 1 + t^2 - \frac{d^2}{dt^2}$$

を用いて標準的に構成される (付録 §A.4) ように, Gauss 空間上の超関数空間 $(E)^*$ が A の第二量子化と呼ばれる作用素 $\Gamma(A)$ から構成される. $\phi \in (L^2)$ の Wiener–Itô 展開を

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, f_n \right\rangle, \qquad x \in E^*, \tag{1.6}$$

とするとき, $\Gamma(A)$ は

$$\Gamma(A)\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, A^{\otimes n} f_n \right\rangle, \qquad x \in E^*,$$

によって定義される. $\Gamma(A)$ の固有値と固有関数は, A のそれから具体的に求めることができ, $\Gamma(A)^{-1}$ が Hilbert–Schmidt 型になることが証明される. したがって, 標準的な構成法 (§A.2) によって, 可算 Hilbert 核型空間 (E) と Gelfand の三つ組

$$(E) \subset (L^2) \equiv L^2(E^*, \mu) \cong \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \subset (E)^* \tag{1.7}$$

が得られる. (E) の元をホワイトノイズテスト関数, $(E)^*$ の元をホワイトノイズ超関数と呼ぶ. $(E)^* \times (E)$ 上の標準複素双線形形式を $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ で表す.

1.2.2 ホワイトノイズテスト関数の Wiener–Itô 展開 ホワイトノイズテスト関数 $\phi \in (E)$ は (L^2) に属するので, (1.6) のように Wiener–Itô 展開されるが, それは単なる L^2-収束よりも強い意味を持つはずである. 実際, 構成法から (E) の定義ノルム系は

$$\| \phi \|_p^2 = \| \Gamma(A)^p \phi \|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! | (A^{\otimes n})^p f_n |_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! | f_n |_p^2, \qquad p \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

で与えられる. ($p = 0$ の場合が (L^2) のノルムに相当する. (1.4) を見よ.) よって, $\phi \in (E)$ の Wiener-Itô 展開は (E) の位相で収束する. 例えば, 指数ベクトル ϕ_ξ に対しては, (1.5) より

$$\| \phi_\xi \|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \left| \frac{\xi^{\otimes n}}{n!} \right|_p^2 = e^{|\xi|_p^2}.$$

したがって, $\phi_\xi \in (E)$ となる必要十分条件は $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ である.

1.2.3 ホワイトノイズ超関数の Wiener–Itô 展開 超関数の列 $F_n \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes n})^*_{\mathrm{sym}}$ で, ある $p \geq 0$ が存在して $\sum_{n=0}^{\infty} n! \, | F_n |_{-p}^2 < \infty$ となっているものを考える. このとき $\phi \in (E)$ に対して

$$\langle\!\langle \Phi, \phi \rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle F_n, f_n \rangle, \qquad \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, f_n \right\rangle,$$

とおくと, $\Phi \in (E)^*$ が証明される. この Φ を

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle :x^{\otimes n}:, F_n \right\rangle \tag{1.9}$$

とかき, Φ の Wiener–Itô 展開と呼ぶ. 逆に, 任意の $\Phi \in (E)^*$ はこの形である. 但し, 級数 (1.9) そのものは各点 $x \in E^*$ で意味を持たない. 収束に意味づけすることもできるが, ここでは単に, Φ と $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ との対応関係を示すものと理解しておこう. 等式 (1.8) はそのままホワイトノイズ超関数に対しても成り立つ.

1.2.4 Brown 運動とホワイトノイズ 区間 $[0,t]$ の特性関数 $1_{[0,t]}$ は $H_{\mathbb{C}}$ に属するので,

$$B_t(x) = \left\langle x, 1_{[0,t]} \right\rangle, \qquad x \in E^*, \quad t \geq 0, \tag{1.10}$$

は $(L^2) = L^2(E^*, \mu)$ に属する関数 (Gauss 型確率変数) である. 容易にわかるが,

$$B_0 = 0, \qquad \mathbf{E}(B_t) = 0, \qquad \mathbf{E}(B_s B_t) = \min\{s, t\} \qquad s, t \geq 0,$$

であるから, $\{B_t\}_{t \geq 0}$ は原点 0 を出発点とする Brown 運動 (の一つの実現) である.

各 $t \in \mathbb{R}$ におけるデルタ関数 δ_t は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = E^*$ に属する. よって,

$$W_t(x) = \langle :x^{\otimes 1}:, \delta_t \rangle = \langle x, \delta_t \rangle$$

は, (1.9) の特別な場合であるから $W_t \in (E)^*$. しばしば $W_t(x) = x(t)$ と略記し, ホワイトノイズとよぶ. 次の事実が注目に値する. (いつも通り $(E)^*$ には強双対位相 (§A.3) が与えられているものとする.)

(a) ホワイトノイズ $t \mapsto W_t \in (E)^*$ は C^∞-級の流れである.

(b) Brown 運動 $t \mapsto B_t$ も $(E)^*$ 内の流れとして微分可能であり, $\dfrac{d}{dt} B_t = W_t$ が成り立つ. 特に $t \mapsto B_t \in (E)^*$ も C^∞-級流れである.

(c) したがって, 任意のテスト関数 $\phi \in (E)$ に対して, $t \mapsto \langle\langle B_t, \phi \rangle\rangle$ は C^∞-級関数で,

$$\frac{d}{dt} \langle\langle B_t, \phi \rangle\rangle = \langle\langle W_t, \phi \rangle\rangle, \qquad \phi \in (E).$$

以上のような意味で, ホワイトノイズは Brown 運動の時間微分であるといえる. 念のためつけ加えると, 上のことは $\dfrac{d}{dt} B_t(x) = W_t(x)$ が各 $x \in E^*$ に対して成り立つという主張とは全く異なる. 実際, Brown 運動の軌跡は微分できないほどジグザグであることはよく知られている. 我々の議論は, デルタ関数が超関数論によって正当化されたことに似ている.

1.3 Fock 空間上の作用素論

1.3.1 各点毎の生成・消滅作用素 我々は, Fock 空間 $\Gamma(H_{\mathbb{C}}) \cong (L^2)$ 上の作用素を取り扱う代わりに, Gelfand の三つ組 (1.7) に基づいて, (E) から $(E)^*$ または (E) からそれ自

身への連続作用素を考える．そのような作用素の全体をそれぞれ $\mathcal{L}((E),(E)^*)$, $\mathcal{L}((E),(E))$ で表す．位相が必要な場合は, 有界収束位相を考えるのが好都合である．また, $\Gamma(H_{\mathbf{C}})$ 上の有界線形作用素はすべて $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に属することに注意しておこう．

Fock 空間 $\Gamma(H_{\mathbf{C}})$ 上の作用素で最も基本的なものは, 生成・消滅作用素であるが, Gelfand の三つ組を考えることで, 各点毎の生成・消滅作用素が導入される．典型的なテスト関数 $\phi \in (E)$ として $\phi(x) = \langle :x^{\otimes n}:, \xi^{\otimes n}\rangle$, $\xi \in E_{\mathbf{C}}$, を考えよう．このとき, 任意の $y \in E_{\mathbf{C}}^*$ に対して

$$D_y\phi(x) = n\,\langle y, \xi\rangle \langle :x^{\otimes(n-1)}:, \xi^{\otimes(n-1)}\rangle$$

とおくと, D_y は (E) 上に連続的に拡張されて, $D_y \in \mathcal{L}((E),(E))$ となる．これを消滅作用素, その共役作用素 $D_y^* \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ を生成作用素とよぶ．特に, $y = \delta_t \in E^*$ に対して

$$a_t = D_{\delta_t}, \qquad a_t^* = D_{\delta_t}^*, \qquad t \in \mathbb{R},$$

とおく．これらが点 $t \in \mathbb{R}$ における消滅作用素・生成作用素である．ここで特に強調しておきたいことは, $a_t \in \mathcal{L}((E),(E))$, $a_t^* \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ となっていることである．特に, 両者とも $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に属する (なお §2.1.3 も参照).

注 意　ホワイトノイズ解析の文献では, $a_t = \partial_t$ と書いて, しばしば飛田の微分作用素と呼んでいる．本稿では, 読者にとってより馴染みのある記号 a_t を用いることにした.

1.3.2　積分核作用素　位相線形空間の一般論によって, 任意の $\kappa \in (E_{\mathbf{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対して,

$$\langle\!\langle \Xi_{l,m}(\kappa)\phi, \psi\rangle\!\rangle = \left\langle \kappa, \left\langle\!\!\left\langle a_{s_1}^* \cdots a_{s_l}^* a_{t_1} \cdots a_{t_m}\phi, \psi \right\rangle\!\!\right\rangle \right\rangle, \qquad \phi, \psi \in (E)$$

をみたす作用素 $\Xi_{l,m}(\kappa) \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ が一意的に存在することがわかる．これを

$$\Xi_{l,m}(\kappa) = \int_{\mathbf{R}^{l+m}} \kappa(s_1, \cdots, s_l, t_1, \cdots, t_m) a_{s_1}^* \cdots a_{s_l}^* a_{t_1} \cdots a_{t_m} ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_m \qquad (1.11)$$

のように形式的積分で表し, κ を核超関数とする積分核作用素と呼ぶ．場の量子論では常識的な表現ではあるが, κ の方こそ超関数にとっていることに注意せよ．前の l 変数, 後ろの m 変数についてそれぞれ対称になっている κ の全体を $(E_{\mathbf{C}}^{\otimes(l+m)})_{\mathrm{sym}(l,m)}^*$ とかく．核超関数をこの空間に制限すれば一意的である．積分核作用素の重要性は次の定理に集約される.

1.3.3　一般展開定理　任意の $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ は $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ の位相で収束する級数

$$\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}), \qquad \kappa_{l,m} \in (E_{\mathbf{C}}^{\otimes(l+m)})_{\mathrm{sym}(l,m)}^*, \qquad (1.12)$$

に展開される．もし $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E))$ ならば, $\kappa_{l,m} \in ((E_{\mathbf{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbf{C}}^{\otimes m})^*)_{\mathrm{sym}(l,m)}$ であって級数 (1.12) は $\mathcal{L}((E),(E))$ で収束する.

なお, 条件 $\kappa_{l,m} \in ((E_{\mathbf{C}}^{\otimes l}) \otimes (E_{\mathbf{C}}^{\otimes m})^*)_{\mathrm{sym}(l,m)}$ は $\Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) \in \mathcal{L}((E),(E))$ と同値である．上の表現 (1.12) を $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ の積分核作用素による展開と呼ぶ．これまで Fock 展開という呼び名を用いてきたが ([13] など), このタイプの展開を初めて議論したのは Haag [9] のようである．その後も, 多くの人達によって様々な形で取り上げられている．例えば, [5] なども見よ.

1.3.4 作用素のシンボル $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して $E_{\mathbf{C}} \times E_{\mathbf{C}}$ 上の $\mathbb{C}$-値関数

$$\widehat{\Xi}(\xi,\eta) = \langle\langle \Xi\phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle, \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbf{C}},$$

を Ξ のシンボルという. 指数ベクトル $\{\phi_\xi ; \xi \in E_{\mathbf{C}}\}$ は (E) で稠密部分空間を張るので, (E) から $(E)^*$ の中への連続線形作用素はシンボルによって一意的に定まる. また, 作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ を積分核作用素で展開するための核超関数は, 作用素のシンボルのテイラー展開から求めることができる. 詳細は [13] を見よ.

1.3.5 シンボルの特徴づけ定理 与えられた関数 $\Theta : E_{\mathbf{C}} \times E_{\mathbf{C}} \to \mathbb{C}$ が作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ のシンボルになるための必要十分条件は, 次の (i), (ii) である:

(i) $\xi,\xi_1,\eta,\eta_1 \in E_{\mathbf{C}}$ を任意に固定するとき, 2 変数複素関数

$$(z,w) \mapsto \Theta(z\xi+\xi_1, w\eta+\eta_1), \qquad z,w \in \mathbb{C},$$

は $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 上で正則である;

(ii) 定数 $C \ge 0$, $K \ge 0$, $p \in \mathbb{R}$ があって,

$$|\Theta(\xi,\eta)| \le C \exp K\left(|\xi|_p^2 + |\eta|_p^2\right), \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbf{C}}.$$

さらに, $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E))$ となるための必要十分条件は, 上の (i) と次の (iii) である:

(iii) 任意の $p \ge 0$, $\epsilon > 0$ に対して, 定数 $C \ge 0$, $q \ge 0$ が存在して

$$|\Theta(\xi,\eta)| \le C \exp\epsilon\left(|\xi|_{p+q}^2 + |\eta|_{-p}^2\right), \qquad \xi,\eta \in E_{\mathbf{C}}.$$

この定理の証明は [13] で完成し, 様々な問題に応用されている .

2 Fock 空間上の量子確率過程

2.1 定義と基本例

2.1.1 量子確率論 通常, 作用素環によって定式化される. $\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数, ϕ を $\mathcal{M}$ 上の正規状態 (normal state) とするとき $(\mathcal{H},\mathcal{M},\phi)$ を量子確率空間という. 古典的確率論は, $\mathcal{M}$ が可換代数の場合に相当する. 実際, 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ に対して, Hilbert 空間を $\mathcal{H} = L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, その上の von Neumann 環 $\mathcal{M}$ として $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$ に属する関数 f によるかけ算作用素 M_f の全体, 正規状態 ϕ を単位ベクトル $\xi_0(\omega) \equiv 1$ に対応するベクトル状態とすれば, $(\mathcal{H},\mathcal{M},\phi)$ は量子確率空間になる. このとき, $\mathcal{M}$ は可換代数であり,

$$\phi(M_f) = \langle M_f\xi_0, \xi_0\rangle = \int_\Omega f(\omega)P(d\omega) = \mathbf{E}(f), \qquad f \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P), \tag{2.1}$$

が成り立つ. 逆に, $\mathcal{M}$ が可換代数であれば, $(\mathcal{M},\mathcal{H},\phi)$ は上のようにして古典的確率空間から得られる. 関係式 (2.1) を軸にして, 古典論における様々な概念を量子確率論に持ち込むことができる.

我々の議論では, Gauss 空間 (E^*, μ) が基礎の確率空間であるから, $\mathcal{H} = L^2(E^*, \mu) = (L^2)$ が念頭にある. ただし, 超関数的なアイデアを有効に導入するため, Hilbert 空間ではなく Gelfand の三つ組 $(E) \subset (L^2) \subset (E)^*$, von Neumann 代数 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ ではなく作用素の族 $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ を取り扱うのである.

2.1.2 定義 さて, ホワイトノイズ解析の特徴の一つは, ホワイトノイズ $\{W_t\}$ を $(E)^*$ 中の連続な流れ (実際には C^∞-級の流れ) と捉えることであった (§1.2.4). これを念頭において, 作用素の族 $\{\Xi_t\,;\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}((E), (E)^*)$ で $t \mapsto \Xi_t$ が連続写像になっているものを量子確率過程とよぶことにする. そうすれば, 連続線形写像 $\Xi : E_{\mathbb{C}} \to \mathcal{L}((E), (E)^*)$ を量子確率超過程と呼ぶのは自然である.

量子確率超過程 Ξ が正則であるとは, Ξ が $E_{\mathbb{C}}^*$ から $\mathcal{L}((E), (E)^*)$ の中への連続線形写像に拡張されるときにいう. 正則な量子確率超過程 Ξ に対して, $\{\Xi_t = \Xi(\delta_t)\}$ とおくと量子確率過程が得られる. 実際, 連続性は $t \mapsto \delta_t \in E_{\mathbb{C}}^*$ のそれからわかる. しかしながら, 任意の量子確率過程が正則な量子確率超過程からこのようにして得られるわけではない. 今後, 正則な量子確率超過程のことを正則な量子確率過程ともよぶ.

2.1.3 量子確率過程としての各点毎の生成・消滅作用素 まず, 各点毎の消滅作用素の族 $\{a_t = \Xi_{0,1}(\delta_t)\}$ 及び生成作用素の族 $\{a_t^* = \Xi_{1,0}(\delta_t)\}$ は正則な量子確率過程となり, 我々の立場では, 極めて基本的である. 実際は, より強く $t \mapsto a_t \in \mathcal{L}((E), (E))$, $t \mapsto a_t^* \in \mathcal{L}((E)^*, (E)^*)$ であって, ともに C^∞-写像である.

2.1.4 古典確率過程と量子確率過程 $\Phi \in (E)^*$ と $\phi \in (E)$ に対して, $\Phi\phi = \phi\Phi \in (E)^*$ が $\langle\langle \Phi\phi, \psi \rangle\rangle = \langle\langle \Phi, \phi\psi \rangle\rangle$, $\psi \in (E)$, をみたす $(E)^*$ の元として定まり, $\phi \mapsto \Phi\phi$ は (E) から $(E)^*$ への連続線形作用素となる. これを $\Phi \in (E)^*$ から引き起こされるかけ算作用素といい, 同じ記号で表す. $(E)^*$ の中の連続な流れ $t \mapsto \Phi_t \in (E)^*$ はかけ算作用素として量子確率過程となる. これは古典的確率 (超) 過程を量子確率過程とみなす標準的な仕方である.

2.1.5 量子的ホワイトノイズ ホワイトノイズ $\{W_t\}$ は $(E)^*$ の中の連続な流れであったから, かけ算作用素とみなせば量子確率過程である. これを量子的ホワイトノイズという. かけ算作用素として

$$W_t = a_t + a_t^*, \qquad t \in \mathbb{R},$$

のように展開されるから, 量子的ホワイトノイズは正則な量子確率過程である.

2.1.6 Hudson–Parthasarathy の生成・消滅過程 積分核作用素で定義される

$$A_t = \Xi_{0,1}(1_{[0,t]}), \qquad A_t^* = \Xi_{1,0}(1_{[0,t]}), \qquad t \ge 0, \tag{2.2}$$

をそれぞれ 消滅過程・生成過程という. 起点 $t = 0$ はもちろん便宜的なものである. このとき, $t \mapsto A_t \in \mathcal{L}((E), (E))$ と $t \mapsto A_t^* \in \mathcal{L}((E)^*, (E)^*)$ は連続であるのみならず, C^∞-級で

あって,

$$\frac{dA_t}{dt} = a_t, \qquad \frac{dA_t^*}{dt} = a_t^*, \tag{2.3}$$

が成り立つ. この事実によって, 我々は dA_t, dA_t^* に関する確率積分 ([11],[20]) を $a_t dt$, $a_t^* dt$ に関する通常の積分として扱うことができる. このあたりのことは §3 で議論する.

2.1.7 量子的 Brown 運動 生成・消滅過程の和を量子的 Brown 運動という. これは, Brown 運動 $\{B_t\}$ をかけ算作用素とみなしたものに他ならない:

$$B_t = A_t + A_t^*, \qquad t \geq 0,$$

2.2 量子確率過程の表現定理

2.2.1 一般化された積分核作用素 積分核作用素 (1.11) の自然な一般化として κ を作用素値超関数におきかえることができる. L を $\mathbb{R}^{l+m}$ 上の $\mathcal{L}((E),(E)^*)$-値超関数とする, すなわち, $L \in \mathcal{L}(E_{\mathbf{C}}^{\otimes(l+m)}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$. このとき,

$$\langle\langle \Xi\phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = \left\langle\left\langle L(\eta^{\otimes l} \otimes \xi^{\otimes m})\phi_\xi, \phi_\eta \right\rangle\right\rangle, \qquad \xi, \eta \in E_{\mathbf{C}}, \tag{2.4}$$

をみたす連続作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ が一意的に存在する. これを

$$\int_{\mathbf{R}^{l+m}} a_{s_1}^* \cdots a_{s_l}^* L(s_1, \cdots, s_l, t_1, \cdots, t_m) a_{t_1} \cdots a_{t_m} ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_m \tag{2.5}$$

とかいて, 一般化された積分核作用素または単に積分核作用素と呼ぶ. 後で導入する量子確率積分は (2.5) の特別な場合である. また, 一般化された積分核作用素は, 従来の積分核作用素 (1.11) を逐次積分することによって自然に現れるが, 逐次積分の正当性 (Fubini 型定理) は厳密に証明できる [18].

2.2.2 作用素の量子確率積分表示 任意の $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ を (1.12) のように積分核作用素で展開して, 和を 3 つの部分に分ける:

$$\Xi^{(1)} = \sum_{l\geq 0, m\geq 1} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}), \quad \Xi^{(2)} = \sum_{l=1}^{\infty} \Xi_{l,0}(\kappa_{l,0}), \quad \Xi^{(3)} = \Xi_{0,0}(\kappa_{0,0}).$$

明らかに, $\Xi^{(3)}$ はスカラー作用素であり,

$$\Xi^{(3)} = \langle\langle \Xi\phi_0, \phi_0 \rangle\rangle\, I.$$

さて, $\Xi^{(1)}$ であるが, そこに現れる積分核作用素は少なくとも 1 つの消滅作用素 a_s を含む. Fubini 型の定理を適用して, 項をまとめ直せば

$$\Xi^{(1)} = \int_{\mathbf{R}} L(s) a_s\, ds, \qquad L \in \mathcal{L}(E_{\mathbf{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*)),$$

が証明される. $\Xi^{(2)}$ についても同様であり, 結局, Ξ は一般化された積分核作用素を用いて

$$\Xi = \int_{\mathbb{R}} L(s)a_s\,ds + \int_{\mathbb{R}} a_s^* M^*(s)\,ds + cI \tag{2.6}$$

のように表現できる. ここで, $L \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E)^*))$, $M \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E)))$, $c \in \mathbb{C}$ である. (2.6) の右辺第2項は $\Xi^{(2)}$ に対応するので, $M^*(t)$ は生成作用素しか含まない. よって任意の $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して $[M(\xi), a_t] = 0$ となっている.

2.2.3 量子確率過程の表現 前節の結果を, 一般の量子確率過程 $\{\Xi_t\}$ に適用すれば,

$$\Xi_t = \int_{\mathbb{R}} L_t(s)a_s\,ds + \int_{\mathbb{R}} a_s^* M_t^*(s)\,ds + c_t I \tag{2.7}$$

のような表示が得られ, 様々な応用が期待できる. ここでは, L_t, M_t の性質には言及する余裕はないが, 後で論じる量子確率積分の一般化されたものと理解されたい (詳細は [17] を見よ). なお, $\{c_t I\}$ はスカラー作用素からなる量子確率過程である.

2.3 適合過程

2.3.1 定義 まず, $\eta \in E_{\mathbb{C}}$ ならば, $D_\eta^* \in \mathcal{L}((E),(E))$ かつ $D_\eta \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ がわかる. したがって, 任意の作用素 $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して交換子 $[D_\eta, \Xi]$, $[D_\eta^*, \Xi]$ は意味をもち, $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ に属する. これを念頭において, 量子確率過程 $\{\Xi_t\}$ が適合している (adapted) とは, $[D_\eta, \Xi_t] = [D_\eta^*, \Xi_t] = 0$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ と supp $\eta \subset (t, +\infty)$ をみたす任意の $\eta \in E_{\mathbb{C}}$ に対して成り立つときにいう.

例えば, 消滅過程 $\{A_t\}$, 生成過程 $\{A_t^*\}$, およびそれらの微分 $\{a_t\}$, $\{a_t^*\}$ は適合過程である. また, 量子確率超過程に対してもこの定義を拡張することができる. §2.1.4で述べたように, 古典的確率過程を量子確率過程とみなすとき, 上の意味の適合性は Brown 運動 $\{B_t\}$ から導かれるフィルトレーションに関する適合性に一致する.

2.3.2 適合過程の表現定理 一例として, 正則な量子確率過程 $\{\Xi_t\}$ が適合しているとき, 次のような積分表現が可能である:

$$\Xi_t = \int_{-\infty}^{t} L(t,s)a_s\,ds + \int_{-\infty}^{t} a_s^* M^*(t,s)\,ds + c_t I, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

ただし,

(i) $L : \mathbb{R} \times E_{\mathbb{C}} \to \mathcal{L}((E),(E)^*)$ は連続かつ第2変数に関して線形, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して supp $L(t,\cdot) \subset (-\infty, t]$.

(ii) $M : \mathbb{R} \times E_{\mathbb{C}} \to \mathcal{L}((E),(E))$ は連続かつ第2変数に関して線形, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して supp $M(t,\cdot) \subset (-\infty, t]$, さらに $[M(s,\xi), a_t] = 0$ が任意の $s, t \in \mathbb{R}$ と $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ に対して成り立つ.

(iii) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は連続関数.

さらに詳しい内容については [17] を参照されたい.

3 量子確率積分

3.1 ホワイトノイズによる古典的確率積分

3.1.1 確率過程の時間に関する積分 まず, $(E)^*$ 内の連続な流れをここでは単に確率過程と呼ぼう. 例えば, ホワイトノイズ $\{W_t\}$ はそうである. さて, 確率過程 $\{\Phi_t\}$ が与えられたとする. このとき, 位相線形空間の一般論を用いて

$$\langle\langle \Psi_t, \phi \rangle\rangle = \int_a^t \langle\langle \Phi_s, \phi \rangle\rangle \, ds, \qquad \phi \in (E),$$

をみたす確率過程 $\{\Psi_t\}$ が存在することがわかる. a は始点として固定して考えている. これを, Φ_t の時間に対する積分といい,

$$\Psi_t = \int_a^t \Phi_s \, ds$$

で表す. このとき, $(E)^*$ の位相に関して

$$\frac{d}{dt} \int_a^t \Phi_s \, ds = \Phi_t$$

が成り立つ.

3.1.2 Hitsuda–Skorokhod 積分 一般に, 確率過程 $\{\Phi_t\}$ に対して $\{a_t^* \Phi_t\}$ が再び確率過程になることが証明される. よって, 前節の意味で, 時間に対する積分:

$$\int_a^t a_s^* \Phi_s \, ds$$

を考えることができるこれを $\{\Phi_t\}$ の Hitsuda–Skorokhod 積分という. 例えば, Brown 運動は

$$B_t = \int_0^t a_s^* \phi_0 \, ds$$

となる. もし $\{\Phi_t\}$ が (L^2) に属し, Brown 運動 $\{B_t\}$ の生成するフィルトレーションに関して適合していれば, Hitsuda–Skorokhod 積分は良く知られた (Riemann 和で定義される) Itô 型確率積分に一致する. Hitsuda–Skorokhod 積分は非適合過程に対しても定義される点が重要である.

もう一つ簡単な例として Langevin 方程式

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = -c\Phi_t + W_t, \qquad \Phi_0 = \Psi \in (E)^*,$$

を考えよう. 我々の立場では, "確率"微分方程式ではなく, $(E)^*$-値ではあるが普通の微分方程式として取り扱えばよい. 解は容易に得られる:

$$\Phi_t = \int_0^t e^{-c(t-s)} a_s^* \phi_0 \, ds + \Psi.$$

3.2 量子確率積分

3.2.1 量子確率過程の時間に関する積分 さて, $\{L_t\} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ を量子確率過程とする. $a \in \mathbb{R}$ を始点として固定するとき,

$$\langle\langle \Xi_t \phi, \psi \rangle\rangle = \int_a^t \langle\langle L_s \phi, \psi \rangle\rangle \, ds, \qquad \phi, \psi \in (E), \qquad t \in \mathbb{R},$$

をみたす $\Xi_t \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ が一意的に存在し (位相線形空間の一般論), $\{\Xi_t\}$ は再び量子確率過程となることが証明される. これを

$$\Xi_t = \int_a^t L_s \, ds$$

とかき, 量子確率過程 $\{L_s\}$ の ds に関する積分という. さらに $\{\Xi_t\}$ は $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ の位相に関して, 微分可能で

$$\frac{d}{dt}\Xi_t = L_t \tag{3.1}$$

が成り立つ.

§2.1.6 で導入した消滅過程 $\{A_t\}$ と生成過程 $\{A_t^*\}$ は上の意味で積分表示される:

$$A_t = \int_0^t a_s \, ds, \qquad A_t^* = \int_0^t a_s^* \, ds.$$

その微分は (3.1) から求められるが, もちろん (2.3) と一致する.

3.2.2 量子確率積分の定義 量子確率過程 $\{L_t\} \subset \mathcal{L}((E),(E)^*)$ に対して, $\{L_t a_t\}$, $\{a_t^* L_t\}$ も量子確率過程になることが証明される. したがって, 量子確率過程 $\{L_t\}$ に対して新しい量子確率過程

$$\int_a^t L_s a_s \, ds, \qquad \int_a^t a_s^* L_s \, ds$$

が定義される. 前者を $\{L_t\}$ の消滅過程に関する量子確率積分, 後者を $\{L_t\}$ の生成過程に関する量子確率積分あるいは量子的 Hitsuda–Skorokhod 積分という.

これらは, 従来議論されている様々な量子確率積分を含む一般的なものになっている. また, これらは (適当な技術的条件のもとで) 作用素値関数 $t \mapsto L_t \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ の Riemann–Stieltjes 積分と一致する. 例えば,

$$\int_a^t L_s a_s ds = \lim_{\Delta} \sum L_{s_j}(A_{s_{j+1}} - A_{s_j}) \equiv \int_a^t L_s dA_s. \tag{3.2}$$

直後の議論との比較のため, 分点の取り方を Itô 型としたが, ここでは重要ではない.

3.2.3 適合過程の量子確率積分 適合過程は, 生成・消滅過程の未来の増分と可換である. より正確には, 量子確率過程 $\{L_t\} \subset \mathcal{L}((E),(E))$ が適合していれば, 定義からすぐわかるが,

$$[L_t, A_{t+h} - A_t] = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad h \geq 0,$$

が成り立つ. このとき, (適当な技術的条件のもとで)

$$\lim_{\Delta} \sum L^*_{s_j}(A^*_{s_{j+1}} - A^*_{s_j}) \equiv \int_a^t L^*_s dA^*_s = \left(\int_a^t L_s dA_s\right)^* = \int_a^t a^*_s L^*_s ds \tag{3.3}$$

であり, 左辺は $\mathcal{L}((E),(E)^*)$ 内で収束する. 今度は, Itô 型の分点の取り方が重要である. (3.2) と比較せよ.

ホワイトノイズ解析による定式化によれば, 個数過程は

$$\Lambda_t = \int_0^t a^*_s a_s \, ds = \int_0^t a^*_s \, dA_s \tag{3.4}$$

で定義される. この表現は, (a) 量子確率過程 $\{a^*_t a_t\}$ の通常の積分; (b) 生成過程の消滅過程に関する量子確率積分; あるいは (c) 消滅過程の生成過程に関する量子確率積分ともいえる. さらに, (a) の見方では適合過程の通常の積分, (b) の見方では適合過程の Itô 型量子確率積分である. 個数過程に関する量子確率積分に特別な役割を与える立場もある [11], [20].

3.2.4 量子 Itô 公式 2 つの適合過程 $\{L_t\}, \{M_t\}$ に対する量子確率積分

$$\Xi_t = \int_a^t L_s dA^\dagger_s, \qquad \Omega_t = \int_a^t M_s dA^\ddagger_s, \qquad A^\dagger_s, A^\ddagger_s = A_s \text{ または } A^*_s,$$

の合成 $\Xi_t \Omega_t$ を再び量子確率積分で表現することを考えよう.

$(A^\dagger_s, A^\ddagger_s) = (A_s, A_s)$, (A^*_s, A_s), (A^*_s, A^*_s) の場合は,

$$\Xi_t \Omega_t = \int_a^t L_s \Omega_s dA^\dagger_s + \int_a^t \Xi_s M_s dA^\ddagger_s. \tag{3.5}$$

また $(A^\dagger_s, A^\ddagger_s) = (A_s, A^*_s)$ のときは,

$$\Xi_t \Omega_t = \int_a^t L_s \Omega_s dA_s + \int_a^t \Xi_s M_s dA^*_s + \int_a^t L_s M_s \, ds \tag{3.6}$$

となるが, この場合は合成が (E) 上で定義されないので, Ξ の定義域を拡張しておく必要がある. これらの公式は, 例えば, Riemann 和によって検証される.

標語的に公式を書き出せば,

$$dA_t \cdot dA_t = dA^*_t \cdot dA^*_t = dA^*_t \cdot dA_t = 0, \qquad dA_t \cdot dA^*_t = dt$$

である. Hudson–Parthasarathy [11] に始まる量子確率積分では, もう一つ個数過程 (3.4) に関する量子確率積分

$$\int_a^t L_s d\Lambda_s$$

が別扱いされるので, $d\Lambda_t$ との関係が必要で, それらをひっくるめて量子 Itô 公式と呼んでいる. 我々の立場では, 個数過程を特別扱いせず,

$$a_t dt \cdot a_t dt = a^*_t dt \cdot a^*_t dt = a^*_t dt \cdot a_t dt = 0, \qquad a_t dt \cdot a^*_t dt = dt$$

をもとにすべての関係式を導出する.

3.3 応用と補足

3.3.1 量子 Langevin 方程式 散逸のある量子系で最も単純なものとして, 自由度1の量子調和振動子が熱浴と相互作用するモデルを考えよう [5]. ただし, ここで述べるものはあまり物理的ではないようだ. しかしながら, [2] などで論じられている量子確率微分方程式を, 我々の立場から見直すにあたってのヒントにはなるだろう.

Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}, dx)$ 上の消滅・生成作用素を

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right), \qquad b^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right), \qquad [b, b^*] = I,$$

とおく. このとき, 自由度1の量子調和振動子の Hamiltonian は

$$H_{\mathrm{sys}} = \hbar\omega b^* b$$

で与えられる. 一方, 熱浴は Fock 空間 $L^2(E^*, \mu) \cong \Gamma(H_{\mathrm{C}})$ 上の Hamiltonian

$$H_{\mathrm{b}} = \hbar \int_{\mathbb{R}} s a_s^* a_s \, ds$$

で表される. さらに, これらの2つの系の相互作用が $L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(E^*, \mu)$ 上の Hamiltonian

$$H_{\mathrm{int}} = i\hbar\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (b \otimes a_s^* - b^* \otimes a_s) \, ds, \qquad \gamma > 0$$

で与えられるものとする. このとき, 全系の Hamiltonian

$$H = H_{\mathrm{sys}} \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{b}} + H_{\mathrm{int}}$$

は Gelfand の三つ組

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes (E) \subset L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(E^*, \mu) \subset (\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes (E))^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \otimes (E)^*$$

を用いて議論することができる. 正確には, ベクトル値 (今の場合なら, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ や $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に値を取る) ホワイトノイズ超関数の理論が必要になるが, これまでに述べてきたスカラー値の場合と並行した結果が確立している [14].

さて, Heisenberg 方程式から出発して得られる, システムの消滅作用素 b の時間発展は, 量子 Langevin 方程式

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\left(i\omega + \frac{\gamma}{2}\right) V(t) - \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} I \otimes a_s \, ds, \qquad V(0) = b \otimes I,$$

で記述される. 第2項は, これまでに議論してきた積分核作用素であり, 時間パラメーター t をもつ量子確率過程になっている. 特に, $V(t)$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes (E)$ 上の連続線形作用素のなす空間内の量子確率過程となる.

3.3.2 積分核作用素における部分積分 いつも通り, 超関数 $f \in E_{\mathbb{C}}^{*}$ の α 階導関数 $f^{(\alpha)}$ を

$$\left\langle f^{(\alpha)}, \xi\right\rangle = (-1)^{\alpha}\left\langle f, \xi^{(\alpha)}\right\rangle, \qquad \xi \in E_{\mathbb{C}},$$

で定義する. さて, 基本的な量子確率過程 $t \mapsto a_t \in \mathcal{L}((E),(E))$, $t \mapsto a_t^* \in \mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$ はともに C^∞-級であって,

$$a_t^{(\alpha)} \equiv \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} a_t = (-1)^\alpha \Xi_{0,1}(\delta_t^{(\alpha)}), \qquad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} a_t^* = (-1)^\alpha \Xi_{1,0}(\delta_t^{(\alpha)}) = \left(a_t^{(\alpha)}\right)^*, \tag{3.7}$$

が成り立つ. 非負の整数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \beta_1, \cdots, \beta_m$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^{l+m}} \kappa(s_1, \cdots, s_l, t_1, \cdots, t_m) a_{s_1}^{(\alpha_1)*} \cdots a_{s_l}^{(\alpha_l)*} a_{t_1}^{(\beta_1)} \cdots a_{t_m}^{(\beta_m)} ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_m =$$

$$= (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_l+\beta_1+\cdots+\beta_m} \Xi_{l,m}\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_l+\beta_1+\cdots+\beta_m}\kappa}{\partial s_1^{\alpha_1}\cdots\partial s_l^{\alpha_l}\partial t_1^{\beta_1}\cdots\partial t_m^{\beta_m}}\right)$$

と定義する. これによって, 通常の積分の場合と同じ形で積分核作用素における部分積分が可能になる [18].

3.3.3 Particle flux density 特に興味深いものは

$$J(t) = \Xi_{1,1}(\delta_t' \otimes \delta_t - \delta_t \otimes \delta_t') = a_t^* a_t' - (a_t')^* a_t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

である. 明らかに, $J(t) \in \mathcal{L}((E),(E)^*)$ である. 定数倍の違いはあるが, 物理学の文献 [7], [8] に倣って, $J(t)$ を particle flux density または momentum density と呼ぼう.

我々の枠組みでは, J は $\mathcal{L}((E),(E))$-値超関数であることがわかる. 詳しくは, $a \in E_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\langle\langle J(a)\phi_\xi, \phi_\eta\rangle\rangle = e^{\langle\xi,\eta\rangle}\int_{\mathbb{R}} a(t)(\xi'(t)\eta(t) - \xi(t)\eta'(t))dt, \qquad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}, \tag{3.8}$$

をみたす $J(a) \in \mathcal{L}((E),(E))$ が一意的に存在し, さらに $a \mapsto J(a)$ は連続, すなわち, $J \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}((E),(E)))$ となる. (3.8) の右辺は

$$\int_{\mathbb{R}} a(t)\,\langle\langle J(t)\phi_\xi, \phi_\eta\rangle\rangle\, dt,$$

に一致するので,

$$J(a) = \int_{\mathbb{R}} a(t) J(t)\, dt, \qquad a \in E_{\mathbb{C}},$$

と表そう. これは smeared particle flux density と呼ばれる.

3.3.4 ベクトル場の表現 直接計算することによって,

$$[J(a), J(b)] = 2J(ab' - a'b), \qquad a, b \in E_{\mathbb{C}}, \tag{3.9}$$

がわかる. 一方で, 各 $a \in E$ に対して $\mathbb{R}$ 上のベクトル場 $X(a) = a(t)\dfrac{d}{dt}$ を対応させ, そのようなベクトル場の全体を $\mathrm{Vect}_0(\mathbb{R})$ で表そう.

$$[X(a), X(b)] = X(ab' - a'b), \qquad a, b \in E, \tag{3.10}$$

に注意すれば, $\mathrm{Vect}_0(\mathbb{R})$ がリー環をなすことがわかる. したがって, (3.9) と (3.10) をあわせて, $a \mapsto \dfrac{1}{2}J(a)$ はリー環 $\mathrm{Vect}_0(T)$ の表現であることがわかる. 指数写像を詳しく調べることは, 微分同相群のユニタリー表現を構成する上で興味深い.

3.3.5 多パラメーター量子ホワイトノイズ 初めに断ったように, この論文を通して, ホワイトノイズ $\{W_t\}$ の $t \in \mathbb{R}$ は時間を想定してきた. しかし, ホワイトノイズ解析の枠組みそのものは, t の走る空間として多次元空間, 例えば, $\mathbb{R}^d$ をとることができる. この場合は, 確率 "過程" ではなく確率 "場" と呼ぶのがふさわしい. 多次元の場合でも直前の議論は同様であり, $\mathbb{R}^d$ 上のベクトル場のなす Lie 環の表現をホワイトノイズを用いて構成することができる. さらに, この議論を進めると, パラメーター $l \geq 0$ の量子的ポワソンホワイトノイズとでも呼ぶべき量子確率場 $(a_t + \sqrt{l})^*(a_t + \sqrt{l})$ が自然に導入される. こうして, 物理学者が研究したベクトル場の表現 [7], [8] はホワイトノイズ超関数の世界で正当化されていることがわかる.

付録 Gelfand の三つ組

A.1 定義

実 Hilbert 空間 H の稠密部分空間 E に H の位相よりも強い局所凸位相が与えられているとき, H とその双対空間 H^* を内積を通して同一視する (Riesz の定理) ことによって, 包含関係

$$E \subset H \subset E^* \tag{A.1}$$

が得られる. さらに, その強い位相に関して E が核型空間になっているとき, (A.1) を Gelfand の三つ組 (Gelfand triplet), nuclear triplet, あるいは rigged Hilbert space (艤装 Hilbert 空間という訳語もあるがあまり定着していない) などと呼ぶ.

核型空間 E とその上の連続な Hilbert 型内積から始めてもよい. その内積に関して E を完備化したものを H とすれば, 上に述べた状況になるので Gelfand の三つ組が得られる. また複素空間でも同様であるが, H と H^* との同一視に標準複素双線形形式を使うか, エルミート内積を使うかで若干の違いを生ずる. この論文では, 一貫して標準複素双線形形式を使っている.

Gelfand の三つ組は, 従来の Hilbert 空間におけるスペクトル理論を拡張するために導入された [6]. それによって, H 上の自己共役作用素の連続スペクトルが固有値のように取り扱えるようになるが, 対応する固有ベクトルは, H ではなく拡張された空間 E^* に属することになる. 物理的応用としては, 量子力学におけるオブザーバブルを連続作用素として取り扱ったり, 複素固有値に意味づけしたりするのに用いられる [3], [4].

A.2 自己共役作用素による構成

H を可算次元の実 Hilbert 空間とする．A を H 上の正の自己共役作用素で A^{-1} が Hilbert-Schmidt 型になるものとする．このとき A のスペクトルは固有値のみから成り，それを

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots \to \infty$$

とすれば，$\| A^{-1} \|_{HS}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{-2} < \infty$ である．各固有値 λ_j に対応する正規化された固有ベクトルを e_j とおく．それらは H の正規直交基底となる．

さて，任意の $p \in \mathbb{R}$ に対して，

$$|\xi|_p^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \langle \xi, e_j \rangle^2 \lambda_j^{2p}, \qquad \xi \in H,$$

とおく．今，$p \geq 0$ として $|\xi|_p < \infty$ をみたす $\xi \in H$ の全体に Hilbert 型ノルム $|\cdot|_p$ を考え合わせたものを E_p とおく．次に，$p > 0$ のときは，すべての $\xi \in H$ に対して $|\xi|_{-p} < \infty$ であるが，H はもはや $|\cdot|_{-p}$ に関しては完備ではない．完備化を E_{-p} とする．こうして，Hilbert 空間の系列 $\{E_p\}_{p \in \mathbb{R}}$ が構成された．ノルムの関係式:

$$|\xi|_p \leq \rho^q |\xi|_{p+q}, \qquad \rho = \lambda_0^{-1}, \quad p \in \mathbb{R}, \quad q \geq 0, \tag{A.2}$$

から，自然な包含関係

$$\begin{aligned} \cdots \subset E_q \subset \cdots \subset E_p \subset \cdots \subset E_0 = \\ = H \subset \cdots \subset E_{-p} \subset \cdots \subset E_{-q} \subset \cdots, \qquad 0 \leq p < q, \end{aligned} \tag{A.3}$$

が得られる．このとき，

$$E = \bigcap_{p \geq 0} E_p$$

は H の稠密部分空間になり，$\{|\cdot|_p\}_{p \in \mathbb{R}}$ を定義ノルム系とする局所凸位相が一意的に導入される．実際には，(A.2) からわかるように，ノルムは整列されているから，E は可算 Hilbert 空間と呼ばれるものになっている．最後に，A^{-1} が Hilbert–Schmidt 型であることから，E は核型空間となる．したがって

$$E \subset H \subset E^*$$

は Gelfand の三つ組となる．ここで述べた可算 Hilbert 核型空間や Gelfand の三つ組は，(H, A) から標準的に構成されたという．

A.3 双対空間

前節のように Gelfand の三つ組 $E \subset H \subset E^*$ が与えられているとしよう．(A.3) によって

$$E^* = \bigcup_{p \geq 0} E_{-p} \tag{A.4}$$

が(集合として)成り立つ．双対空間 E^* に位相が必要な場合は強双対位相，すなわち E の有界集合上の一様収束位相を与える．したがって，E^* の位相はセミノルム系

$$|x|_B = \sup_{\xi \in B} |\langle x, \xi \rangle|, \qquad x \in E^*, \quad B \subset E:\ \text{有界集合},$$

で定義される．ここで，$B \subset E$ が有界であるとは，E の定義セミノルムのどれでみても有界になっているものをいう．なお，(A.4) を位相もこめて理解するためには，右辺を局所凸空間の帰納極限 $\operatorname*{ind\,lim}_{p\to\infty} E_{-p}$ とすればよい．

A.4 緩増加超関数

$\mathbb{R}$ 上定義された実数値 L^2-関数のなす Hilbert 空間を $H = L^2(\mathbb{R}, dt)$ とする．微分作用素

$$A = 1 + t^2 - \frac{d^2}{dt^2} \tag{A.5}$$

を考えよう．変数 t を1次元空間 $\mathbb{R}$ の位置を表す座標とすれば，A は自由度1の量子調和振動子の Hamiltonian と考えてよい．H_n を n 次の Hermite 多項式とすれば，各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \quad \lambda_n = 2(n+1), \quad e_n(t) = (\sqrt{\pi}\, 2^n n!)^{-1/2} e^{-t^2/2} H_n(t), \tag{A.6}$$

が成り立つ．ここで，固有関数系 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ は H の正規直交基底であるから，A は正の自己共役作用素である．さらに，$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$ であるから，A^{-1} は H 上の Hilbert–Schmidt 型作用素である．前節のことから (H, A) から可算 Hilbert 核型空間 E と Gelfand の三つ組 $E \subset H \subset E^*$ が構成される．実は，こうして Schwartz の急減少関数の空間と緩増加超関数の空間が(位相もこめて)得られているのである：

$$E = \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad E^* = \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

多くの文献では，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の位相は，セミノルム系

$$\|\xi\|_{m,n} \equiv \max_{t \in \mathbb{R}} \left| t^m \xi^{(n)}(t) \right|, \qquad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

で定義されるが，(H, A) から導入される位相と一致する．

参考文献

[1] L. Accardi et al. (eds.): "Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes," Lect. Notes in Math. Vol. 1055, Springer–Verlag, 1984; "Quantum Probability and Applications II–V," Lect. Notes in Math. Vol. 1136, 1985; Vol. 1303, 1988; Vol. 1396, 1989; Vol. 1442, 1990; "Quntum Probability and Related Topics Vol. VI–IX," World Scientific, 1991, 1992, 1993, 1994.

[2] 有光敏彦: 非平衡・量子散逸系の正準理論, 物性研究 **62** (1994), 31–61.

[3] A. Bohm and M. Gadella: "Dirac Kets, Gamow Vectors and Gel'fand Triplets," Lect. Notes in Physics Vol. 348, Springer–Verlag, 1989.

[4] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov and I. T. Todorov: "Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory," Benjamin, Massachusetts, 1975.

[5] C. W. Gardiner: "Quantum Noise," Springer–Verlag, 1991.

[6] I. M. Gelfand and N. Ya. Vilenkin: "Generalized Functions, Vol. 4," Academic Press, 1964.

[7] G. A. Goldin, J. Grodnik, R. T. Powers and D. H. Sharp: *Nonrelativistic current algebra in the N/V limit*, J. Math. Phys. **15** (1974), 88–100.

[8] G. A. Goldin and D. H. Sharp: *Particle spin from representations of the diffeomorphism group*, Commun. Math. Phys. **92** (1983), 217–228.

[9] R. Haag: *On quantum field theories*, Dan. Mat. Fys. Medd. **29** no. 12 (1955), 1–37.

[10] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit: "White Noise," Kluwer Academic, 1993.

[11] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy: *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 301–323.

[12] P. A. Meyer: "Quantum Probability for Probabilists," Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer–Verlag, 1993.

[13] N. Obata: "White Noise Calculus and Fock Space," Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer–Verlag, 1994.

[14] N. Obata: *Operator calculus on vector-valued white noise functionals*, J. Funct. Anal. **121** (1994), 185–232.

[15] N. Obata: ホワイトノイズによる量子確率解析, 物性研究 **62** (1994), 62–85.

[16] N. Obata: Fock 空間上の量子確率過程 – ホワイトノイズの観点から, 京都大学数理解析研究所講究録, **887** (1994), 72–96.

[17] N. Obata: *Generalized quantum stochastic processes on Fock space*, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[18] N. Obata: *Integral kernel operators on Fock space – Generalizations and applications*, preprint, 1995.

[19] M. Ohya and D. Petz: "Quantum Entropy and Its Use," Springer–Verlag, 1993.

[20] K. R. Parthasarathy: "An Introduction to Quantum Stochastic Calculus," Birkhäuser, 1992.

[21] 山本喜久・渡部仁貴: "量子光学の基礎" 培風館, 1994.